

PROVA DE MATEMÁTICA

Questão 1

Os números A e B , escritos nas bases 3 e 4, respectivamente, são $A = 22212_{(3)}$ e $B = 20301_{(4)}$. Quanto vale a soma $A + B$ no sistema de numeração decimal?

SOLUÇÃO:

Tem-se: $A = 239$ e $B = 561$.

Portanto $A + B = 800$

Questão 2

Sejam $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais que $f(x) = 7x + 9$ e $f[g(x)] = 3x + 1$. Desse modo, quanto vale $g(54)$?

SOLUÇÃO:

Tem-se: $f[g(x)] = 7g(x) + 9 \Rightarrow 7g(x) + 9 = 3x + 1$.

Assim: $g(x) = \frac{3}{7}x - \frac{8}{7}$ e $g(54) = 22$

Questão 3

Encontre valores reais para a e b , de modo que o resto da divisão do polinômio $P(x) = x^3 - 4x^2 + ax - b$ pelo polinômio $Q(x) = x^2 - x + 1$ seja igual a 4.

SOLUÇÃO:

O resto desta divisão é $R(x) = (a - 4)x + (3 - b)$.

Portanto, para $R(x) = 4$, obtém-se: $\begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \end{cases}$.

Questão 4

Os ângulos internos de um pentágono convexo são diretamente proporcionais aos números 2, 3, 4, 5 e 6, respectivamente. Calcule a soma do complemento do menor desses ângulos com o suplemento do maior deles.

SOLUÇÃO:

Sejam a, b, c, d e e os ângulos procurados.

$$\text{Assim: } \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{d}{5} = \frac{e}{6} \Rightarrow \begin{cases} a = 54^\circ \\ b = 81^\circ \\ c = 108^\circ \\ d = 135^\circ \\ e = 162^\circ \end{cases}$$

Portanto, a soma procurada é $S = 54^\circ$.

PROVA DE MATEMÁTICA

Questão 5

O segundo termo de uma Progressão Aritmética (PA) é $a_2 = \sec\left(\frac{37\pi}{3}\right)$ e o quinto termo dela é $a_5 = \sin(-2850^\circ) + \cos(2280^\circ)$. Quanto vale a soma dos 10 primeiros termos dessa PA?

SOLUÇÃO:

Calculando, tem-se: $a_2 = 2$ e $a_5 = 0$.

Como $a_2 = a_1 + r$ e $a_5 = a_1 + 4r$, obtém-se $a_1 = \frac{8}{3}$ e $r = -\frac{2}{3}$.

O décimo termo desta PA será $a_{10} = -\frac{10}{3}$.

Logo: $S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} \Rightarrow S_{10} = -\frac{10}{3}$

Questão 6

O icosaedro regular é um poliedro convexo formado por 20 faces triangulares. Quantas diagonais tem o icosaedro?

SOLUÇÃO:

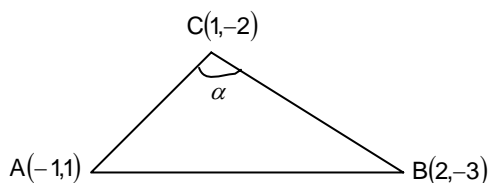
No Icosaedro, tem-se: $F = 20$ faces, $A = 30$ arestas e $V = 12$ vértices.

O número de diagonais será $d = C_{12}^2 - A$, ou seja, $d = 36$ diagonais.

Questão 7

Considere o triângulo limitado pelos pontos $A(-1,1)$, $B(2,-3)$ e $C(1,-2)$. Calcule o cosseno do maior ângulo interno desse triângulo.

SOLUÇÃO:



Calculando as medidas dos lados, obtém-se:
$$\begin{cases} d_{AB} = 5 \\ d_{AC} = \sqrt{13} \\ d_{BC} = \sqrt{2} \end{cases}$$

Aplicando a Lei dos Cossenos para o maior ângulo, obtém-se: $\cos \alpha = -\frac{5\sqrt{26}}{26}$.

PROVA DE MATEMÁTICA

Questão 8

Um cone de revolução e uma esfera são sólidos equivalentes e a altura do cone mede $\frac{1}{3}$ do raio da esfera. Qual é a relação existente entre o raio desse cone (r) e o raio da esfera (R)?

SOLUÇÃO:

Como os sólidos são equivalentes, tem-se: $V_{\text{cone}} = V_{\text{esfera}}$.

Sabe-se que $h = \frac{R}{3}$.

Aplicando estas condições, obtém-se: $\frac{r}{R} = 2\sqrt{3}$.

Questão 9

Os afixos dos números complexos $z_1 = -3 - 4i$, $z_2 = 3 - 4i$ e $z_3 = -3 + 4i$ são pontos pertencentes a uma circunferência. Deduza a equação geral dessa circunferência.

SOLUÇÃO:

Os afixos são os pontos $A(-3, -4)$, $B(3, -4)$ e $C(-3, 4)$.

A equação da circunferência que contém estes pontos é: $x^2 + y^2 = 25$

Questão 10

Mostre que $2\arctg\left(\frac{1}{3}\right) + \arctg\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}$.

SOLUÇÃO:

$$\text{Chamando: } \begin{cases} a = \arctg\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \text{tga} = \frac{1}{3} \\ b = \arctg\left(\frac{1}{7}\right) \Rightarrow \text{tgb} = \frac{1}{7} \end{cases}$$

Portanto, deve-se provar que $2a + b = \frac{\pi}{4}$.

Tomando as tangentes: $\text{tg}(2a + b) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \text{tg}(2a + b) = 1$.

Mas: $\text{tg}(2a + b) = \frac{\text{tg}(2a) + \text{tgb}}{1 - \text{tg}(2a) \cdot \text{tgb}}$ e $\text{tg}(2a) = \frac{2\text{tga}}{1 - \text{tg}^2 a}$.

Substituindo os valores conhecidos na equação, obtém-se:

$$\text{tg}(2a + b) = \frac{\frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7}}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7}} \Rightarrow \text{tg}(2a + b) = 1.$$